

1

第4項が11，第10項が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) 第100項を求めよ。
- (2) 第何項が初めて -100 より小さくなるか。



2

初項が50，公差が -3 である等差数列について，次の問いに答えよ。

- (1) 第何項が初めて負の数となるか。
- (2) 初項から第何項までの和が最大となるか。
また，その和を求めよ。



3

等比数列の導入



4

等比数列をなす3つの実数の和が15，積が -1000 であるとき，
この3つの実数を求めよ。



5

次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{30} k$

(2) $\sum_{l=1}^{15} l^2$

(3) $\sum_{k=1}^6 2^k$

☆シグマ計算の導入

☆問題解説



6

次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-2) \quad (2) \sum_{k=1}^n (4k^3-1) \quad (3) \sum_{k=1}^n (3k-1)^2$$

$$(4) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$



7

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$1, 1+2, 1+2+4, 1+2+4+8, \dots$$



8

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{2 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 8}, \frac{1}{8 \cdot 11}, \frac{1}{11 \cdot 14}, \frac{1}{14 \cdot 17}, \dots$$



9

次の和 S を求めよ。

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \dots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$$



10

初項 1, 公差 3 の等差数列を, 次のように 1 個, 2 個, 3 個, …… と群に分ける。

$$1 \quad 4 \quad | \quad 7 \quad 10 \quad | \quad 13 \quad 16 \quad 19 \quad | \quad \dots$$

- (1) 第 n 群の最初の数を求めよ。
- (2) 第 n 群に含まれる数の和を求めよ。
- (3) 148 は第何群の何番目の数か。



11

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1, a_{n+1}-a_n=5$

(2) $a_1=4, a_{n+1}=a_n-2$

(3) $a_1=2, a_{n+1}=5a_n$

(4) $a_1=5, a_{n+1}=-3a_n$

(5) $a_1=1, a_{n+1}-a_n=2n$

(7) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+n^2$

(6) $a_1=2, a_{n+1}-a_n=3n^2+n$

(8) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+4^n$



12

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2, a_{n+1}=3a_n-2$

(2) $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

(3) $a_1=1, a_{n+1}=9-2a_n$

(5) $a_1=1, a_{n+1}=-2a_n+1$

(4) $a_1=1, a_{n+1}=4a_n+3$

(6) $a_1=0, 2a_{n+1}-3a_n=1$



13

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=10, a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$

(2) $a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$



14

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3n$$



15

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3a_n-2$ であるとする。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) 一般項 a_n を求めよ。



16

条件 $a_1=4$, $b_1=3$, $a_{n+1}=5a_n+2b_n$, $b_{n+1}=2a_n+5b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ。



17

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$
- (2) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}+5a_{n+1}+6a_n=0$
- (3) $a_1=1$, $a_2=4$, $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$



18

数学的帰納法の導入



19

数学的帰納法によって, 次の等式を証明せよ。

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$



20

n は自然数とする。数学的帰納法によって, 次の等式を証明せよ。

- (1) $1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$
- (2) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$



1

【解答】(1) -277 (2) 第42項

2

【解答】(1) 第18項 (2) 第17項, 和442

4

【解答】5, -10 , 20

5

【解答】(1) 465 (2) 1240 (3) 126

6

【解答】(1) $n(n-1)$ (2) $n(n^3+2n^2+n-1)$ (3) $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$ (4) $\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

7

【解答】 $2^{n+1}-n-2$

8

【解答】 $\frac{n}{2(3n+2)}$

9

【解答】 $(2n-3) \cdot 2^n + 3$

10

【解答】(1) $\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$ (2) $\frac{1}{2}n(3n^2-1)$ (3) 第10群の5番目の数

11

【解答】(1) $a_n=5n-4$ (2) $a_n=-2n+6$ (3) $a_n=2 \cdot 5^{n-1}$ (4) $a_n=5(-3)^{n-1}$ 【解答】(5) $a_n=n^2-n+1$ (6) $a_n=n^3-n^2+2$ (7) $a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$ (8) $a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

12

【解答】(1) $a_n=3^{n-1}+1$ (2) $a_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$ (3) $a_n=(-2)^n+3$ (4) $a_n=2 \cdot 4^{n-1}-1$ (5) $a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$ (6) $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

13

【解答】(1) $a_n=2^n(2n+3)$ (2) $a_n=\frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}-1}$

15

【解答】 (1) $a_1 = 1$ (2) $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ (3) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

16

【解答】 $a_n = \frac{7^n + 3^{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{7^n - 3^{n-1}}{2}$

17

【解答】 (1) $a_n = \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$ (2) $a_n = (-2)^{n-1} - (-3)^{n-1}$ (3) $a_n = (n+2) \cdot 3^{n-2}$

19

【解答】 略

20

【解答】 (1) 略 (2) 略

1

解説

この数列の初項を a ，公差を d とする。

第 4 項が 11 であるから $a + 3d = 11$ …… ①

第 10 項が -7 であるから $a + 9d = -7$ …… ②

①，② を解いて $a = 20$ ， $d = -3$

よって $a_n = 20 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 23$

(1) $a_{100} = -3 \cdot 100 + 23 = -277$

(2) $a_n < -100$ とすると $-3n + 23 < -100$

よって $3n > 123$ ゆえに $n > 41$

これを満たす最小の自然数 n は $n = 42$

したがって，第 42 項が初めて -100 より小さくなる。

2

解説

(1) この数列の第 n 項は $50 + (n-1)(-3) = -3n + 53$

$-3n + 53 < 0$ を解くと $n > \frac{53}{3} = 17.6$ ……

これを満たす最小の自然数は $n = 18$

よって，第 18 項が初めて負の数となる。

(2) (1) より，初項から第 17 項までは正の数，第 18 項からは負の数となるので，
初項から第 17 項までの和が最大となる。

また，その和は $\frac{1}{2} \cdot 17 \{2 \cdot 50 + (17-1) \cdot (-3)\} = 442$

別解 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2 \cdot 50 + (n-1)(-3)\} = \frac{1}{2} n (-3n + 103)$$

$$= -\frac{3}{2} n^2 + \frac{103}{2} n = -\frac{3}{2} \left(n - \frac{103}{6} \right)^2 + \frac{103^2}{24}$$

$\frac{103}{6} = 17.1\ldots$ で n は自然数であるから， $n = 17$ のとき S_n は最大となる。(以下同じ)

3

解説

4

解説

(解 1) 等比数列をなす 3 つの実数を a ， ar ， ar^2 とおく。

条件から $a + ar + ar^2 = 15$ …… ①

$a \cdot ar \cdot ar^2 = -1000$ …… ②

② から $a^3 r^3 = -1000$ すなわち $(ar)^3 = (-10)^3$

ar は実数であるから $ar = -10$ …… ③

① の両辺に r を掛けて $ar + ar^2 + ar^3 = 15r$ すなわち $ar(1 + r + r^2) = 15r$

③ を代入して $-10(1 + r + r^2) = 15r$ 整理すると $2r^2 + 5r + 2 = 0$

よって $(r+2)(2r+1) = 0$ ゆえに $r = -2, -\frac{1}{2}$

③ から $r = -2$ のとき $a = 5, r = -\frac{1}{2}$ のとき $a = 20$

$a = 5, r = -2$ のとき $ar = -10, ar^2 = 20$

$a = 20, r = -\frac{1}{2}$ のとき $ar = -10, ar^2 = 5$

よって、求める 3 つの実数は $5, -10, 20$

(解 2) 等比数列をなす 3 つの実数を a, b, c とおくと

$$b^2 = ac \quad \dots\dots ①$$

条件から $a + b + c = 15$ …… ②, $abc = -1000$ …… ③

①, ③ から $b \cdot b^2 = -1000$ すなわち $b^3 = (-10)^3$

b は実数であるから $b = -10$

これを ①, ② に代入すると $ac = 100$ …… ④, $a + c = 25$ …… ⑤

⑤ から $c = 25 - a$ …… ⑥

これを ④ に代入して $a(25 - a) = 100$

よって $a^2 - 25a + 100 = 0$ すなわち $(a - 5)(a - 20) = 0$

ゆえに $a = 5, 20$

⑥ から $a = 5$ のとき $c = 20, a = 20$ のとき $c = 5$

したがって、求める 3 つの実数は $5, -10, 20$

5

解説

(1) $\sum_{k=1}^{30} k = \frac{1}{2} \cdot 30(30+1) = 465$

(2) $\sum_{l=1}^{15} l^2 = \frac{1}{6} \cdot 15(15+1)(2 \cdot 15+1) = 1240$

(3) $\sum_{k=1}^6 2^k = \frac{2(2^6-1)}{2-1} = 126$

6

解説

(1) $\sum_{k=1}^n (2k-2) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 2n = n(n-1)$

(2) $\sum_{k=1}^n (4k^3-1) = 4 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n 1 = 4 \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - n$
 $= n\{n(n^2+2n+1)-1\} = n(n^3+2n^2+n-1)$

(3) $\sum_{k=1}^n (3k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (9k^2-6k+1) = 9 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$

$$= 9 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{2} n \{ 3(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 2 \}$$

$$= \frac{1}{2} n (6n^2 + 3n - 1)$$

$$(4) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$$

7

解説

この数列の第 k 項 a_k は $a_k = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = \frac{1(2^k-1)}{2-1} = 2^k - 1$

よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

8

解説

この数列の第 k 項 a_k は $a_k = \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$

求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3n+2)-2}{2(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)} \end{aligned}$$

9

解説

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$$

この等式の両辺に 2 を掛けると

$$2S = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n$$

辺々引くと $-S = 1 + 2(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad -S &= 1 + 2 \cdot \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1) \cdot 2^n \\ &= -(2n-3) \cdot 2^n - 3 \end{aligned}$$

したがって $S = (2n-3) \cdot 2^n + 3$

10

解説

(1) もとの等差数列の第 n 項は $1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

$n \geq 2$ のとき、第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる数の総数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって、第 n 群 ($n \geq 2$) の最初の数は、もとの等差数列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項である

$$\text{から} \quad 3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-2=\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、求める数は} \quad \frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$$

(2) 求める和は、初項 $\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$ 、公差 3、項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\left\{2 \cdot \frac{1}{2}(3n^2-3n+2)+(n-1) \cdot 3\right\}=\frac{1}{2}n(3n^2-1)$$

(3) (1) で求めた数を a_n とする。

$$148 \text{ が第 } n \text{ 群に含まれるとすると} \quad a_n \leq 148 < a_{n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで} \quad a_{10}=\frac{1}{2}(3 \cdot 10^2-3 \cdot 10+2)=136$$

$$a_{11}=\frac{1}{2}(3 \cdot 11^2-3 \cdot 11+2)=166$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 n は $n=10$

よって、148 は第 10 群に含まれる。

第 10 群に含まれる数を、小さい方から順に書き出すと

$$136, 139, 142, 145, 148, \cdots$$

したがって、148 は第 10 群の 5 番目の数である。

11

解説

(1) 条件より、数列 $\{a_n\}$ は初項 1、公差 5 の等差数列であるから

$$a_n=1+(n-1) \cdot 5=5n-4$$

(2) 条件より、数列 $\{a_n\}$ は初項 4、公差 -2 の等差数列であるから

$$a_n=4+(n-1) \cdot (-2)=-2n+6$$

(3) 条件より、数列 $\{a_n\}$ は初項 2、公比 5 の等比数列であるから

$$a_n=2 \cdot 5^{n-1}$$

(4) 条件より、数列 $\{a_n\}$ は初項 5、公比 -3 の等比数列であるから

$$a_n=5(-3)^{n-1}$$

(5) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $2n$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k=1+2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n$$

$$\text{よって} \quad a_n=n^2-n+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

初項は $a_1=1$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n=n^2-n+1$$

(6) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $3n^2+n$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k) = 2 + 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n$$

よって $a_n = n^3 - n^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

初項は $a_1 = 2$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = n^3 - n^2 + 2$

(7) $a_{n+1} - a_n = n^2$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は n^2

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

よって $a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

初項は $a_1 = 1$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6) \quad \left[a_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 - 5n + 6) \text{ でもよい} \right]$

(8) $a_{n+1} - a_n = 4^n$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は 4^n

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 1 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1}$$

よって $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

初項は $a_1 = 1$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

12

解説

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 2$ を変形すると $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

ここで、 $b_n = a_n - 1$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n, \quad b_1 = a_1 - 1 = 1$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 1、公比 3 の等比数列で $b_n = 3^{n-1}$

$a_n = b_n + 1$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 3^{n-1} + 1$

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$ を変形すると $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$

ここで、 $b_n = a_n - 3$ とおくと $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n, \quad b_1 = a_1 - 3 = -2$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 -2 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で $b_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n = b_n + 3$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$

(3) $a_{n+1} = 9 - 2a_n$ を変形すると $a_{n+1} - 3 = -2(a_n - 3)$

ここで、 $b_n = a_n - 3$ とおくと $b_{n+1} = -2b_n, \quad b_1 = a_1 - 3 = -2$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 -2 、公比 -2 の等比数列で $b_n = (-2) \cdot (-2)^{n-1}$

$a_n = b_n + 3$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = (-2)^n + 3$

(4) $a_{n+1}=4a_n+3$ を変形すると $a_{n+1}+1=4(a_n+1)$

ここで, $b_n=a_n+1$ とおくと $b_{n+1}=4b_n$, $b_1=a_1+1=2$

よって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 2, 公比 4 の等比数列で $b_n=2 \cdot 4^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=2 \cdot 4^{n-1}-1$

(5) $a_{n+1}=-2a_n+1$ を変形すると $a_{n+1}-\frac{1}{3}=-2\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

ここで, $b_n=a_n-\frac{1}{3}$ とおくと $b_{n+1}=-2b_n$, $b_1=a_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

よって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{2}{3}$, 公比 -2 の等比数列で $b_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}$

$a_n=b_n+\frac{1}{3}$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$

(6) $2a_{n+1}-3a_n=1$ を変形すると $a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$

ここで, $b_n=a_n+1$ とおくと $b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n$, $b_1=a_1+1=1$

よって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列で $b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

13

解説

(1) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+2$

$b_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと $b_{n+1}=b_n+2$ また $b_1=\frac{a_1}{2}=\frac{10}{2}=5$

よって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 5, 公差 2 の等差数列で

$$b_n=5+(n-1) \cdot 2=2n+3$$

したがって $a_n=2^n \cdot b_n=2^n(2n+3)$

(2) $a_1>0$ であるから, 漸化式より $a_2>0$ よって $a_3>0$

同様にして, すべての自然数 n について $a_n>0$

よって, 各項の逆数が存在して, 漸化式から

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{3}{a_n}$$

$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1}=2+\frac{3}{a_n}$

これを变形して $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また $b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=1+1=2$

よって, 数列 $\{b_n+1\}$ は初項 2, 公比 3 の等比数列で

$b_n+1=2 \cdot 3^{n-1}$ ゆえに $b_n=2 \cdot 3^{n-1}-1$

$$a_n = \frac{1}{b_n} \text{ であるから } a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1}$$

14

解説

15

解説

$$S_n = 3a_n - 2$$

$$(1) a_1 = S_1 \text{ であるから } a_1 = 3a_1 - 2 \quad \text{よって} \quad a_1 = 1$$

$$(2) a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ であるから } a_{n+1} = (3a_{n+1} - 2) - (3a_n - 2)$$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$$

$$(3) (1), (2) \text{ から, 数列 } \{a_n\} \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } \frac{3}{2} \text{ の等比数列で}$$

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

16

解説

$$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = 2a_n + 5b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{とする。}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ から } a_{n+1} + b_{n+1} = 7(a_n + b_n)$$

$$\text{また} \quad a_1 + b_1 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{よって, 数列 } \{a_n + b_n\} \text{ は初項 } 7, \text{ 公比 } 7 \text{ の等比数列で } a_n + b_n = 7 \cdot 7^{n-1}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n + b_n = 7^n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$$

$$\text{また} \quad a_1 - b_1 = 4 - 3 = 1$$

$$\text{よって, 数列 } \{a_n - b_n\} \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } 3 \text{ の等比数列で } a_n - b_n = 1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n - b_n = 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ から } 2a_n = 7^n + 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{7^n + 3^{n-1}}{2}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ から } 2b_n = 7^n - 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad b_n = \frac{7^n - 3^{n-1}}{2}$$

17

解説

$$(1) a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0 \text{ を変形すると } a_{n+2} - a_{n+1} = -4(a_{n+1} - a_n)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと } b_{n+1} = -4b_n, \quad b_1 = a_2 - a_1 = 1$$

$$\text{よって, 数列 } \{b_n\} \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } -4 \text{ の等比数列であるから } b_n = (-4)^{n-1}$$

したがって, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-4)^{k-1} = 1 + \frac{1 - (-4)^{n-1}}{1 - (-4)}$$

ゆえに $a_n = \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5} \dots\dots ①$

初項は $a_1 = 1$ であるから、①は $n = 1$ のときにも成り立つ。

よって $a_n = \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$

(2) $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ を変形すると

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = -3(a_{n+1} + 2a_n) \dots\dots ①$$

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} + 3a_n) \dots\dots ②$$

①から、数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は初項 $a_2 + 2a_1 = 1$ 、公比 -3 の等比数列で

$$a_{n+1} + 2a_n = (-3)^{n-1} \dots\dots ③$$

②から、数列 $\{a_{n+1} + 3a_n\}$ は初項 $a_2 + 3a_1 = 1$ 、公比 -2 の等比数列で

$$a_{n+1} + 3a_n = (-2)^{n-1} \dots\dots ④$$

④-③ から $a_n = (-2)^{n-1} - (-3)^{n-1}$

(3) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ を変形すると

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 1$ 、公比 3 の等比数列で

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}$$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{9}$

数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ は初項 $\frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}$ 、公差 $\frac{1}{9}$ の等差数列で $\frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{9}$

よって $a_n = (n+2) \cdot 3^{n-2}$

18

角解説

19

解説

この等式を ① とする。

[1] $n = 1$ のとき (左辺) $= 1^2 = 1$, (右辺) $= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (2-1)(2+1) = 1$

よって、①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、①が成り立つ、すなわち

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3} k(2k-1)(2k+1) \dots\dots ②$$

と仮定する。

$n = k+1$ のとき、①の左辺について考えると、②により

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + \{2(k+1)-1\}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1) + (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1) + 3(2k+1)\} \\
&= \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3) = \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3) \\
&= \frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)-1\}\{2(k+1)+1\}
\end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

20

解説

(1) $1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$ …… ① とする。

[1] $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1 \quad \text{右辺}=\frac{1}{9}(10-1)=1$$

よって、 $n=1$ のとき、① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ、すなわち

$$1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}=\frac{1}{9}(10^k-1) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

と仮定する。 $n=k+1$ のとき、① の左辺について考えると、② から

$$\begin{aligned}
1+10+10^2+\cdots+10^{k-1}+10^k &= \frac{1}{9}(10^k-1)+10^k \\
&= \frac{1}{9}(10^k-1+9\cdot 10^k) \\
&= \frac{1}{9}(10^{k+1}-1)
\end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$ …… ① とする。

[1] $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1\cdot 3=3 \quad \text{右辺}=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot (1+1)\cdot (4\cdot 1+5)=3$$

よって、 $n=1$ のとき、① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ、すなわち

$$1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

と仮定する。 $n=k+1$ のとき、① の左辺について考えると、② から

$$1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) + (k+1)\{2(k+1)+1\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5) + 6(2k+3)\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(4k^2 + 17k + 18)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}$$

よって、 $n = k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。